$\boxed{\text{Antispherical module and RW conjecture}}$

$(p \geq h)$

Recall: W = affine Weyl gp
$W_f \subset W$ finite Weyl group
${}^fW = \{ w \in W \mid w \text{ is minimal in } W_f w \}$

Principal block:

$$\mathrm{Rep}_0(G) = \langle L(w \cdot_p 0) : w \in {}^fW \rangle_{\text{Serre}}$$

Indecomposable tilting objects in $\mathrm{Rep}_0(G)$ parametrized by ${}^fW$: $w \longmapsto T(w \cdot_p 0)$

We have $[\mathrm{Rep}_0(G)] = \bigoplus_{y \in {}^fW} [H^0(y \cdot_p 0)]$

$$[T(w \cdot_p 0)] = \sum_{y \in {}^fW} (T(w \cdot_p 0) : H^0(y \cdot_p 0)) [H^0(y \cdot_p 0)]$$

Goal: Compute the numbers $\boxed{(T(w \cdot_p 0) : H^0(y \cdot_p 0))}$.

Translation & wall-crossing functors

For $s \in S$ we choose $\mu_s \in X$ on the s-wall of the fundamental alcove

$\rightarrow \Theta_s = T_{\mu_s}^0 T_0^{\mu_s} : \mathrm{Rep}_0(G) \longrightarrow \mathrm{Rep}_0(G)$.
(self-adjoint functor)

Facts:
1) If $w \in {}^fW$ and $ws \notin {}^fW$ then $\Theta_s H^0(w \cdot_p 0) = 0$
2) If $w \in {}^fW$ and $ws \in {}^fW$ then $\Theta_s H^0(w \cdot_p 0) \simeq \Theta_s H^0(ws \cdot_p 0)$
3) If $w \in {}^fW$ and $ws > w$ $(\Rightarrow ws \in {}^fW)$ then we have
$H^0(w \cdot_p 0) \hookrightarrow \Theta_s H^0(w \cdot_p 0) \twoheadrightarrow H^0(ws \cdot_p 0)$

Consequences:
1) Each Θ_s sends tilting modules to tilting modules

2) $\mathcal{M}^{asph} := \mathcal{L}(v^{-1}) \otimes_{\mathcal{H}_f} \mathcal{H}$ antispherical module

We have

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]} \mathcal{M}^{asph} \arrow[r, "\sim"] & {[\mathrm{Rep}_0(G)]} \\ 1 \otimes H_w =: N_w \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[loop below, "\cdot \underline{H}_s"] & {[H^0(w \cdot_p 0)]} \arrow[loop below, "{[\Theta_s]}"] \end{tikzcd} \qquad (w \in {}^f W)$$

$\rightsquigarrow$ Want to describe $[T(w \cdot_p 0)]$ in terms of $\mathcal{M}^{asph}$.

Conjecture (Andersen, 1997)

If $w \in {}^f W$ and $\langle w \cdot_p 0 + \rho, \alpha^\vee \rangle < p^2$ for all $\alpha \in R^+$

then $[T(w \cdot_p 0)] = 1 \otimes \underline{N}_w$, i.e.

$$(T(w \cdot_p 0) : H^0(y \cdot_p 0)) = n_{y,w}(1).$$

Rmk: Inspired by computation of similar multiplicities for quantum grps at a root of unity (Soergel)!

New conjecture (R-Williamson, 2015):

For all $w \in {}^f W$ we have

$$[T(w \cdot_p 0)] = 1 \otimes {}^p\underline{N}_w$$

i.e. $(T(w \cdot_p 0) : H^0(y \cdot_p 0)) = {}^p n_{y,w}(1)$

Ex: $G = SL_2$, $w = s_0 s s_0 s$, $p = 3$

$s_0 s s_0 s \cdot_p 0 = 12$

$H^0(12)$	$s_0 s s_0 s$
$H^0(10)$	$s_0 s s_0$
$H^0(6)$	$s s_0$
$H^0(4)$	s_0

$T(12) =$ (the modules above)

$$\begin{cases} n_{s_0 s, s_0 s s_0 s} = 0 \\ {}^3 n_{s_0 s, s_0 s s_0 s}(v) = v \end{cases}$$

Rmk: The new conjecture does NOT imply Andersen's conjecture for $p \gg 0$.

Categorical version of the conjecture. We assume $p > h$

We consider the realization of (W, S) on $\mathfrak{h} := \Bbbk \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}R$ with:

- for $s \in S_f$, α_s and $\alpha_s^\vee$ are the images in $\mathfrak{h}$ of the simple coroot and simple root associated with s.
- for $s \in S_f$, the α_s = image of $-\gamma^\vee$
  $\alpha_s^\vee$ = ——— $-\gamma$
  with $\gamma \in R_+$ s.th. $s \in W \longmapsto s_\gamma \in W_f$.

$\rightsquigarrow$ Elias-Williamson diagrammatic category $\mathcal{D}_{BS}$, and Karoubian envelope $\mathcal{D}$.

<u>Note</u>: Translation functors are defined up to isomorphism (Requires the choice of a module one wants to tensor with)

<u>Conjecture</u>: Il existe des foncteurs

$T^s : \mathrm{Rep}_0(G) \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mu_s}(G)$, $T_s : \mathrm{Rep}_{\mu_s}(G) \longrightarrow \mathrm{Rep}_0(G)$,

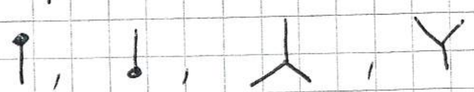
des adjonctions (T^s, T_s), (T_s, T^s), et des morphismes

$\xi_{s,t} : (T_s T^s)(T_t T^t) \cdots \longrightarrow (T_t T^t)(T_s T^s) \cdots$

pour tous $s, t \in S$ tq $s \neq t$ et st est d'ordre fini,

tq en envoyant

$*$ $B_s\langle n \rangle$ sur $T_s T^s$

$*$  sur les morphismes

$T_s T^s \longrightarrow \mathrm{id}$, $\mathrm{id} \longrightarrow T_s T^s$, $(T^s T_s)(T^s T_s) \longrightarrow T^s T_s$

et $(T_s^s T_s^s) \longrightarrow (T_s T^s)(T_s T^s)$ induits par l'adjonction

$*$  sur $\xi_{s,t}$

on définit une action $\overset{\text{à droite}}{\vee}$ de $\mathcal{D}_{BS}$ sur $\mathrm{Rep}_0(G)$

Main Conséquence :

Catégorification du module antisphérique :

$$\mathcal{D}^{asph} := \mathcal{D} \Big/\!\!\Big/ \begin{array}{l}\text{morphismes qui se factorisent} \\ \text{via une somme d'objets } B_w \text{ avec} \\ w \notin {}^fW\end{array}$$

Pour $w \in {}^fW$ on note $\overline{B}_w$ = image de B_w ds $\mathcal{D}^{asph}$.

Faits :

- $[\mathcal{D}^{asph}] \simeq \mathcal{M}^{asph}$

  ~~images~~ $[\overline{B}_w] \longleftrightarrow {}^p\underline{N}_w$

- Pour tous ~~[...]~~ $M, N \in \mathcal{D}^{asph}$,

  $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{asph}}(M, N\langle n\rangle)$ est un k-ev. de dim. finie

Thm (R-Williamson)

Supposons que la conjecture catégorique est vraie. Alors il existe un foncteur $\Psi : \mathcal{D}^{asph} \longrightarrow \mathrm{Tilt}(\mathrm{Rep}_0(G))$ ~~[...]~~ et un isomorphisme $\Psi \circ \langle 1\rangle \simeq \Psi$ tq

(1) ~~Ψ~~ $\forall M, N \in \mathcal{D}^{asph}$, Ψ induit un isomorphisme

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{asph}}(M, N\langle n\rangle) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\Psi(M), \Psi(N))$$

(2) $\Psi(\overline{B}_w) \simeq T(w \cdot \lambda_0) \quad \forall w \in {}^fW$

Corollaire : Si la conjecture catégorique est vraie, la formule de caractères conjecturale est vraie.

2. Le cas des groupes $GL_n(\mathbb{k})$

On suppose maintenant que $\begin{cases} G = GL_n(\mathbb{k}) & \text{avec } n \geq 2 \\ T, B & \text{tore max. et Borel naturels} \end{cases}$

et que $p > n$. Alors $S \longleftrightarrow \{1, \dots, n-1\} \cup \{\infty\}$

On prend $\begin{cases} \lambda_0 = (n, \dots, n) \in X \simeq \mathbb{Z}^n \\ \mu_j = (\underbrace{n, \dots, n}_{j}, n+1, \underbrace{n, \dots, n}_{n-j-1}) & \text{si } j \in \{1, \dots, n-1\} \\ \mu_\infty = (p+1, n, \dots, n) \end{cases}$

Thm (R. Williamson)

Dans ce cadre, la conjecture catégorique est vraie.

La preuve consiste en 3 étapes :

* **Étape 1 :** Action de $U(\hat{\mathfrak{gl}}_p)$ sur $\mathrm{Rep}(G)$

Action construite par Chuang-Rouquier (utilise l'algèbre 2KM de Rouquier)

Foncteur $E \longleftrightarrow V \otimes -$ avec V = rep. naturelle de G

Foncteur $F \longleftrightarrow V^* \otimes -$ avec V^* = duale de V

[Brundan] : la 2-catégorie de Rouquier est équivalente à celle de Khovanov-Lauda

$\Longrightarrow$ Action catégorique de l'algèbre 2KM de Khovanov-Lauda (-Rouquier) sur $\mathrm{Rep}(G)$.

Combinatoire : $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} [\mathrm{Rep}_0(G)] \xrightarrow{\sim} \Lambda^n \mathrm{nat}_p$

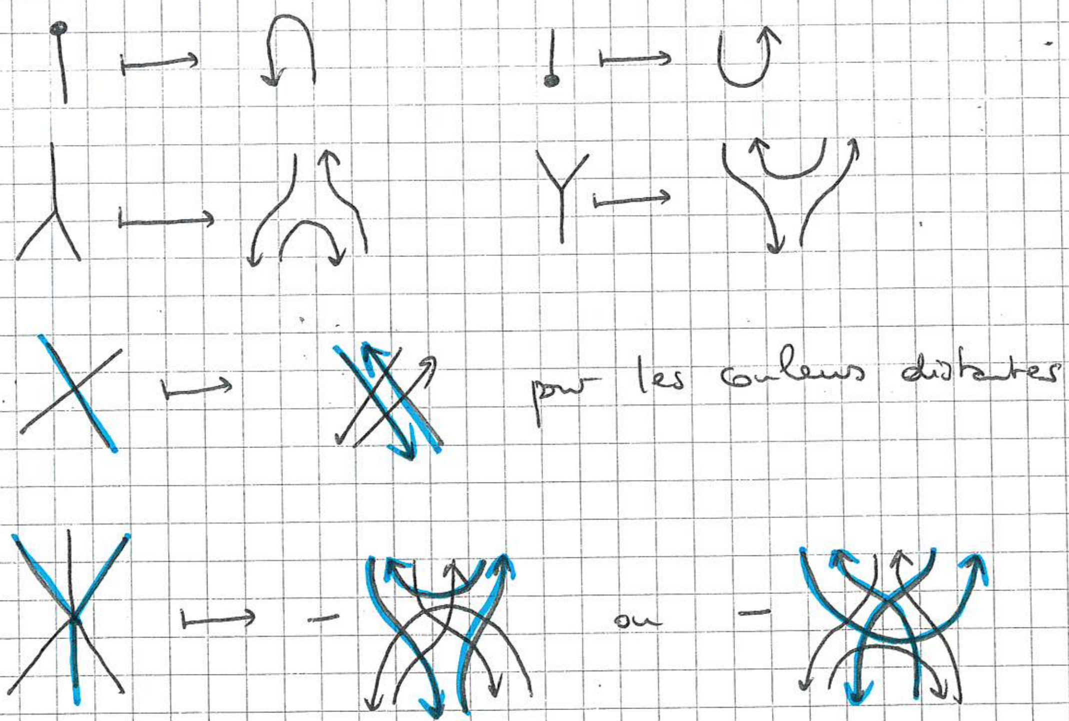
* **Etape 2** : $\widehat{gl_n} \hookrightarrow \widehat{gl_p}$ si $p>n$

$\Lambda^n \mathrm{nat}_p \big|_{\widehat{gl_n}}$ contient un facteur naturel isomorphe à $\hat{\Lambda}^n \mathrm{nat}_n$

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Rep}^{[n]}(G) \subset \mathrm{Rep}(G)$ somme des blocks correspondant à $\Lambda^n \mathrm{nat}_n \subset \Lambda^n \mathrm{nat}_p$.

Observation : L'action de $U(\widehat{gl_p})$ sur $\mathrm{Rep}(G)$ se restreint en une action de $U(\widehat{gl_n})$ sur $\mathrm{Rep}^{[n]}(G)$. (cf. R. Maksimau)

* **Etape 3** : L'action de $U(\widehat{gl_n})$ sur $\mathrm{Rep}^{[n]}(G)$ se restreint en une action de $\mathcal{D}_{BS}$ sur $\mathrm{Rep}_0(G)$ via



Cf Mackaay - Stošić - Vaz - Thiel
(mais avec conventions de signes différentes)

cf. Dualité de Schur-Weyl.